УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 150, кн. 1 Физико-математические науки *2008*

УДК 517.982

УРАВНЕНИЯ С ПАРНЫМИ СВЁРТОЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ВИНЕРА – ХОПФА

Л.Г. Салехов, Л.Л. Салехова

Аннотация

Рассматривается класс уравнений с парными свёрточными операторами Винера – Хопфа. Исследование проводится в пространстве обобщенных функций, допускающих аналитические представления (представления Коши). В этом пространстве рассматриваемые уравнения эквивалентны краевой задаче относительно исчезающей на бесконечности кусочно-голоморфной функции $\hat{\Phi}(z) = (\hat{\Phi}^+(z), \hat{\Phi}^-(z))$. Граничное условие задается на вещественной оси $\mathbb{R}$ и понимается в смысле обобщенных функций. Посредством преобразования Фурье в пространстве обобщенных функций медленного роста показывается, что рассматриваемые уравнения приводятся к изоморфным уравнениям. Последние при гипотезе регулярности обобщенных функций содержат двусторонние и односторонние уравнения Винера – Хопфа, парные интегральные уравнения с постоянными и с переменными пределами интегрирования, а также парные обыкновенные дифференциальные уравнения.

Ключевые слова: парный свёрточный оператор, обобщенная функция, аналитическое представление, кусочно-голоморфная функция, парные интегральные уравнения, парные обыкновенные дифференциальные уравнения.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathcal{O}'_{-1}$ – пространство, дуальное к пространству $\mathcal{O}_{-1}$ бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций с асимптотикой на бесконечности $|\varphi^{(k)}(t)| \le C|t|^{-1}$ для любого $k \in \mathcal{N}$. Топология пространства $\mathcal{O}_{-1}$ индуцируется из топологического пространства $\mathcal{E}$ бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций, то есть последовательность $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится в $\mathcal{O}_{-1}$, если она сходится в $\mathcal{E}$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ существует постоянная C_k, не зависящая от j, такая, что $|\varphi_j^{(k)}(t)| \le C_k|t|^{-1}$.

Если $\Phi \in \mathcal{O}'_{-1}$, то, как известно [3, с. 84], преобразование

$$\hat{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\langle \Phi, \frac{1}{t-z}\right\rangle, \quad \operatorname{Im} z \ne 0, \tag{1}$$

называют представлением Коши или аналитическим представлением обобщенной функции Φ, исчезающей на бесконечности. При этом, если $\Phi \in \mathcal{O}'^{(p)}_{-1}$, где $p \in \mathbb{N}$, то в силу [4, с. 84] $\hat{\Phi}(z)$ в окрестности $\operatorname{Im} z = 0$ имеет следующее поведение: $|\hat{\Phi}(z)| \le C(\operatorname{Im} z)^{-p+1}$.

Функция $\hat{\Phi}(z)$ даёт аналитическое представление для обобщенной функции Φ в следующем смысле:

$$\langle \Phi, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\hat{\Phi}^+(t+i\varepsilon) - \hat{\Phi}^-(t-i\varepsilon)\right)\varphi(t)\,dt \qquad \forall\varphi \in \mathcal{O}_{-1},$$

что символически записывается следующим образом: $\Phi = \hat{\Phi}^+ - \hat{\Phi}^-$.

Ищется обобщенная функция $\Phi \in \mathcal{O}'_{-1}$, удовлетворяющая на оси $\mathbb{R}$ уравнению

$$\delta_+ * [K_1(t)(\delta_+ * \Phi)] + \delta_- * [K_2(t)(\delta_- * \Phi)] = T, \tag{2}$$

где $\delta_\pm$ – обобщенные функции, определяемые по Н.Н. Боголюбову:

$$\delta_\pm := \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\pi i} v.p.\frac{1}{t},$$

в свою очередь, δ – мера Дирака, $v.p.(1/t)$ – главное значение по Коши от $(1/t)$, $K_1(t), K_2(t) \in \mathcal{M}$ – пространство мультипликаторов для пространства $\mathcal{O}'_{-1}$, T – заданная обобщенная функция из $\mathcal{O}'_{-1}$, а свёртки $\delta_\pm * \Phi$ определяются по следующим формулам

$$\langle \delta_\pm * \Phi, \varphi \rangle := \langle \Phi, \delta_\mp * \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}_{-1}.$$

Оператор уравнения (2) есть парный свёрточный оператор Винера – Хопфа [1, с. 69], поскольку операторы $\delta_\pm$ являются дополнительными свёрточными проекторами, то есть $\delta_\pm^{*2} = \delta_\pm$; $\delta_+ * \delta_- = 0$; $\delta_+ + \delta_- = \delta$. Уравнение (2) содержит так называемые уравнения с односторонними свёрточными операторами Винера – Хопфа в пространстве $\mathcal{O}'_{-1}$ (при $K_1 \equiv 0$ или $K_2 \equiv 0$ и T, равном $T * \delta_-$ или $T * \delta_+$ соответственно), а также алгебраические уравнения вида $K\Phi = T$.

В силу формул

$$\delta_+ * \Phi = \hat{\Phi}^+, \quad \delta_- * \Phi = -\hat{\Phi}^-,$$

полученных в работе ([5]), уравнение (2) можно представить в следующем виде

$$[\widehat{K_1(t)\hat{\Phi}^+}]^+ + [\widehat{K_2(t)\hat{\Phi}^-})]^- = T. \tag{3}$$

Эта краевая задача, соответствующая уравнению (2), есть задача отыскания кусочно-голоморфной функции $\hat{\Phi}(z) = (\hat{\Phi}^+(z), \hat{\Phi}^-(z))$, исчезающей на бесконечности, по краевому условию (4), понимаемому в смысле обобщенных функций из $\mathcal{O}'_{-1}$.

Известно, что преобразование Фурье, определяемое формулой

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} \varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in S$$

в пространстве S пробных функций, бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$, быстро исчезающих на бесконечности, является топологическим автоморфизмом пространства S. Это позволяет определить преобразование Фурье в пространстве S' обобщенных функций медленного (умеренного) роста формулой

$$\langle \mathcal{F}\mathcal{T}, \varphi \rangle := \langle \mathcal{T}, \mathcal{F}\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S, \quad \forall \mathcal{T} \in S'.$$

Тогда уравнение (2) посредством преобразования Фурье в S' изоморфно уравнению

$$\mathcal{Y}(\xi) \cdot \{\widetilde{K}_1 * [\mathcal{Y}(\xi)\widetilde{\Phi}(\xi)]\} + \mathcal{Y}(-\xi) \cdot \{\widetilde{K}_2 * [\mathcal{Y}(-\xi)\widetilde{\Phi}(\xi)]\} = \widetilde{\mathcal{T}}(\xi), \tag{4}$$

где $\mathcal{Y}(\xi)$ – функция Хевисайда.

Уравнение (4) в предположении регулярности обобщенных функций в зависимости от структур обобщенных функций $\widetilde{K}_1$ и $\widetilde{K}_2$ содержит двухсторонние, односторонние уравнения Винера – Хопфа, парные интегральные уравнения как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования, а также интегро-дифференциальные уравнения по терминологии [2].

2. Алгоритм решения уравнения (2)

Изложим вкратце алгоритм решения уравнения (2). Применяя преобразование (1) к краевому условию (4), находим аналитическое представление этого условия:

$$\begin{cases} [\hat{K}_1^+(z)-\hat{K}_1^-(z)]\hat{\Phi}^+(z)-\sum\limits_k \operatorname{res}_{(\xi=a_k^+)}\dfrac{\hat{K}_1^-(\xi)\hat{\Phi}^+(\xi)}{\xi-z}=\hat{T}^+(z)+P(z),\ \operatorname{Im} z>0,\\ -\ [\hat{K}_2^+(z)-\hat{K}_2^-(z)]\hat{\Phi}^-(z)-\sum\limits_k \operatorname{res}_{(\xi=a_k^-)}\dfrac{\hat{K}_2{}^+(\xi)\hat{\Phi}^-(\xi)}{\xi-z}=\hat{T}^-(z)+P(z),\ \operatorname{Im} z<0,\end{cases}$$

где $\hat{K}_{1,2}^{+;-}(z)$ – «верхние» и «нижние» функции представления Коши для K_1 и K_2 соответственно, $a_k^{\pm}$ – полюса кратностей $p_k^{\pm}$ функций $\hat{K}_2^-(z)$ и $\hat{K}_1^+(z)$ в полуплоскостях $\operatorname{Im}\xi>0$ и $\operatorname{Im}\xi<0$ соответственно; $\hat{T}^{\pm}(z)$ – «верхняя» и «нижняя» функции представления Коши для T; $P(z)$ – произвольный полином. Таким образом получим:

$$\begin{cases}\hat{\Phi}^+(z)=\dfrac{1}{[\hat{K}_1^+(z)-\hat{K}_1^-(z)]}\left\{\hat{T}^+(z)+P(z)+\sum\limits_k\sum\limits_{j=1}^{p_k^+}\dfrac{A_{kj}}{(z-a_k^+)^j}\right\},\quad \operatorname{Im} z>0,\\ \hat{\Phi}^-(z)=-\dfrac{1}{[\hat{K}_2^+(z)-\hat{K}_2^-(z)]}\left\{\hat{T}^-(z)+P(z)+\sum\limits_k\sum\limits_{j=1}^{p_k^-}\dfrac{B_{kj}}{(z-a_k^-)^j}\right\},\quad \operatorname{Im} z<0,\end{cases}\tag{5}$$

где A_{kj} и B_{kj} – произвольные константы. Для искомой обобщенной функции Φ соотношения (5) будут представлением Коши, исчезающим на бесконечности, если выполняются следующие условия:

a) $\lim\limits_{|z|\to\infty}\hat{\Phi}^{\pm}(z)=0$;

b) $\hat{\Phi}(z)^{\pm}$ не имеет особых точек в областях $\operatorname{Im} z>0$ и $\operatorname{Im} z<0$ соответственно.

Сингулярность может возникнуть за счёт нулей функций: $[\hat{K}_1^+(z)-\hat{K}_1^-(z)]$, $[\hat{K}_2^+(z)-\hat{K}_2^-(z)]$. В процессе удовлетворения указанным условиям определяется степень полинома $P(z)$, а также часть или даже все его коэффициенты и константы A_{kj} и B_{kj}. Более того, если число нулей указанных функций достаточно велико, то могут возникнуть и условия разрешимости, налагаемые на функции $\hat{T}^{\pm}(z)$.

Если условия a), b) выполнены, то формулы (5) дадут решение краевой задачи (3), а решение уравнения (2) определится из соотношения $\Phi=\hat{\Phi}^+-\hat{\Phi}^-$. При этом, если $\Phi(z)$ в окрестности $\operatorname{Im} z=0$ имеет поведение $|\Phi(z)|\le C|\operatorname{Im} z|^{-p}$, $p\in\mathbb{N}$, то $\Phi\in\mathcal{O}'^{(p+1)}_{-1}$ [4, с. 83–84].

В качестве иллюстрации рассмотрим пример.

3. Пример

Рассмотрим уравнение:

$$\delta_+*\left\{\frac{(2\pi t)^2+\alpha^2+2\alpha}{(2\pi t)^2+\alpha^2}(\delta_+*\Phi)\right\}+\delta_-*\left\{\mu\frac{(2\pi t)^2+\beta^2+2\beta}{(2\pi t)^2+\beta^2}(\delta_-*\Phi)\right\}=a\delta_++b\delta_-,\tag{6}$$

где α, β – произвольные положительные константы; $\mu\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Соответствующая краевая задача будет иметь вид

$$\left[\frac{(2\pi t)^2\widehat{+\alpha^2+}2\alpha}{(2\pi t)^2+\alpha^2}\hat{\Phi}^+]^++\mu[\frac{(2\pi t)^2\widehat{+\beta^2+}2\beta}{(2\pi t)^2+\beta^2}\hat{\Phi}^-\right]^-=a\delta_++b\delta_-.\tag{7}$$

Изложенный выше алгоритм дает решение задачи (7):

$$\begin{cases} \hat{\Phi}^{+}(z) = \dfrac{a\alpha}{\alpha^2+2\alpha}\left[-\dfrac{\alpha}{2\pi i z} + \dfrac{i(\sqrt{\alpha^2+2\alpha}-\alpha)}{2\pi z + i\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}\right], & \operatorname{Im} z > 0, \\ \hat{\Phi}^{-}(z) = \dfrac{b\beta}{\mu(\beta^2+2\beta)}\left[-\dfrac{\beta}{2\pi i z} + \dfrac{i(\sqrt{\beta^2+2\beta}-\beta)}{2\pi z - i\sqrt{\beta^2+2\beta}}\right], & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \tag{8}$$

которое имеет в окрестности точки $z=0$ поведение $|\hat{\Phi}(z)^{\pm}| \le C|\operatorname{Im} z|^{-1}$.

Поэтому решение уравнения (6) $\Phi \in \mathcal{O}'^{(2)}_{-1}$ и выглядит следующим образом:

$$\Phi = \frac{a\alpha}{\alpha^2+2\alpha}\times \\ \times\left\{\alpha\delta_{+} + \frac{i(\sqrt{\alpha^2+2\alpha}-\alpha)}{2\pi t + i\sqrt{\alpha^2+2\alpha}}\right\} - \frac{b\beta}{\mu(\beta^2+2\beta)}\left\{\beta\delta_{-} + \frac{i(\sqrt{\beta^2+2\beta}-\beta)}{2\pi t - i\sqrt{\beta^2+2\beta}}\right\}, \tag{9}$$

Преобразования Фурье в $\mathcal{S}'$ приводит уравнение (6) к изоморфному уравнению вида:

$$\mathcal{Y}(\xi)\left\{\widetilde{\Phi}(\xi) + \int\limits_0^{\infty} \exp(-\alpha|\xi-\tau|)\widetilde{\Phi}(\tau)\,d\tau\right\} + \\ + \mathcal{Y}(-\xi)\mu\left\{\widetilde{\Phi}(\xi) + \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(-\beta|\xi-\tau|)\widetilde{\Phi}(\tau)\,d\tau\right\} = a\mathcal{Y}(\xi) + b\mathcal{Y}(-\xi).$$

Решением полученного двустороннего интегрального уравнения Винера – Хопфа будет образ Фурье функции (9), то есть:

$$\hat{\Phi}(\xi) = \frac{a\alpha}{\alpha^2+2\alpha}\left\{\alpha + (\sqrt{\alpha^2+2\alpha}-\alpha)\exp(-\xi\sqrt{\alpha^2+2\alpha})\right\}\mathcal{Y}(\xi) - \\ - \frac{b\beta}{\mu(\beta^2+2\beta)}\left\{\beta - (\sqrt{\beta^2+2\beta}-\beta)\exp(\xi\sqrt{\beta^2+2\beta})\right\}\mathcal{Y}(-\xi).$$

В частности, при $\xi > 0$, $\alpha = 1$, $a = 1$ решением одностороннего уравнения Винера – Хопфа:

$$\widetilde{\Phi}(\xi) + \int\limits_0^{\infty} \exp(-|\xi-\tau|)\widetilde{\Phi}(\tau)\,d\tau = 1,$$

будет функция

$$\widetilde{\Phi}(\xi) = \frac{1}{3}\left(1 + (\sqrt{3}-1)\exp(-\xi\sqrt{3})\right),$$

где $\xi > 0$.

Summary

L.G. Salekhov, L.L. Salekhova. Equations with Dual Convolution Wiener – Hopf Operators.

A class of equations with dual convolution Wiener – Hopf operators is considered. The investigation is carried out in the space of generalized functions, admitting analytical presentations (Cauchy presentations). Equations of the considered class are equivalent to a boundary value problem regarding the disappearing at infinity piecewise-holomorphic function $\hat{\Phi}(z) = (\hat{\Phi}^{+}(z), \hat{\Phi}^{-}(z))$. Boundary condition is given on the real axis $\mathbb{R}$ and is understood in the sense of generalized functions. The considered equations are reduced to some isomorphic equations by means of Fourier transformation in space of tempered generalized functions. The latter, according to hypothesis of generalized functions regularity, include bilateral and unilateral Wiener – Hopf equations, dual integral equations with constant and variable limits, and dual ordinary differential equations.

Key words: dual convolution operator, generalized function, analytical presentation, partly-holomorphic function, dual integral equations, dual ordinary differential equations.

Литература

1. *Прёсдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. – М.: Недра, 1984. – 211 с.
2. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свёртки. – М.: Наука, 1978.–640 с.
3. *Бремерман Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразование Фурье. – М.: Мир, 1968.–253 с.
4. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. – М.: Мир, 1986. – 346 с.
5. *Салехов Л.Г., Салехова Л.Л.* О некоторых классах уравнений в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_{+}$ // Дифференциальные уравнения и их приложения: Материалы Междунар. науч. конф. – Самара, 2002. – С. 337–340.

Поступила в редакцию
22.01.08

Салехов Леонард Гарунович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета,

Салехова Ляйля Леонардовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета, г. Казань.

E-mail: *tatuca@knet.ru*